Letztes Tutorium

MI, 09.07.08

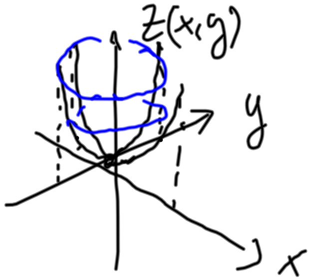
1. Volumenintegration, Schwerpunkt, Trägheitstensor
2. Diffusion, Wellenglg.
3. Maxwell
4. Potentiale
5. Magnetostatik / Elektrostatik, ~~Poynting~~
6. Fourier-Transformation
7. Gauß / Stokes, Fluss durch Oberflächen
8. ~~Taylorentwicklung~~
9. ~~Differentialgleichungen~~
10. ~~Anwendung von δ und Θ, Greensche Fkt.~~

Jul 9-14:54

① [PK2] <u>Rotationsparaboloid</u>

$$z(x,y) = \frac{a}{2}(x^2+y^2)\,, \qquad h = \frac{a}{2}R^2$$

(a)



$$z(x=0,y) = \frac{a}{2}y^2$$
$$z(x,y=0) = \frac{a}{2}x^2$$

Der Körper ist rotationssymmetrisch, kann also Zylinderkoordinaten wählen. $z=z(x,y)$ ist aber schon vorgegeben. Wähle also als Parametrisierung

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{u}) = \begin{pmatrix} \rho\cos(\varphi) \\ \rho\sin(\varphi) \\ \frac{a}{2}\rho^2 \end{pmatrix}.$$
$$\vec{u} = (\rho,\varphi)$$

(b) Oberfläche des Paraboloiden berechnet sich über

$$F = \int d^2u \sqrt{\det(g_{ij})}\,.$$

Best. von g_{ij}: $\quad g_{ij} = \vec{t}_i \cdot \vec{t}_j$, $\vec{t}_i = \frac{\partial \vec{x}}{\partial u_i}$ Tangentialvektor.

Habe nur ρ, φ als neue Koordinaten, somit

$$u_1 = \rho, \quad u_2 = \varphi$$

1) Berechne Tangentialvektoren

$$\vec{t}_\rho = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \rho} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ a\rho \end{pmatrix}, \quad \vec{t}_\varphi = \begin{pmatrix} -\rho \sin(\varphi) \\ \rho \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

2) Bilde nun alle Skalarprodukte:

$$\vec{t}_\rho \cdot \vec{t}_\rho = c^2 + s^2 + a^2\rho^2 = 1 + a^2\rho^2$$

$$\vec{t}_\rho \cdot \vec{t}_\varphi = \vec{t}_\varphi \cdot \vec{t}_\rho = c(-\rho s) + s\rho c + a\rho \cdot 0 = 0$$

$$\vec{t}_\varphi \cdot \vec{t}_\varphi = \rho^2 s^2 + \rho^2 c^2 = \rho^2$$

3) Damit folgt die Metrik

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \vec{t}_\rho \cdot \vec{t}_\rho & \vec{t}_\rho \vec{t}_\varphi \\ \vec{t}_\varphi \cdot \vec{t}_\rho & \vec{t}_\varphi \cdot \vec{t}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + a^2\rho^2 & 0 \\ 0 & \rho^2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \det(g_{ij}) = (1+a^2\rho^2)\rho^2 = \rho^2 + a^2\rho^4$$

Nun kann F berechnet werden:

aus $h = \frac{a}{2}R^2 = \frac{a}{2}\rho^2\Big|_{\rho=R}$

$$F = \int d^2u \sqrt{\det(g_{ij})} = \int_0^{R} d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi \sqrt{\rho^2 + a^2\rho^4}$$

$$= 2\pi \int_0^R d\rho\, \rho \sqrt{1+a^2\rho^2} \underset{\rho \to \frac{1}{a}\rho}{=} 2\pi \cdot \frac{1}{a^2} \int_0^{Ra} d\rho \frac{2}{2}\rho \sqrt{1+\rho^2}$$

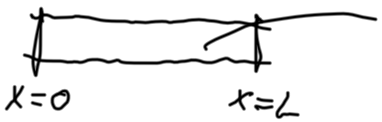
$$= \frac{\cancel{2}\pi}{a^2} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{2}{3} (1+\rho^2)^{3/2} \Big|_0^{Ra} = \frac{2\pi}{3a^2} (1+\rho^2)^{3/2} \Big|_0^{Ra}$$

$$= \frac{2\pi}{3a^2} \left((1+a^2R^2)^{3/2} - 1 \right) = \frac{2\pi}{3a^2} \left(\sqrt{1+a^2R^2}^{\,3} - 1 \right)$$

② Diffusion & Wellen, Konti

[H20] Viel Lärm um nichts

(a)



$n(x,t) = n_0 + n_1 \cos(kx)\cos(\omega t)$

Hier hilft die Konti! (ρ und $\vec{j}$ hängen über die Konti zusammen)

$$\boxed{\nabla \vec{j} + \dot{\rho} = 0} \quad \text{bzw.} \quad \boxed{\nabla \vec{j} + \dot{n} = 0}$$

$$\Leftrightarrow \dot{n} = -\nabla \vec{j} = 0 + n_1 \cos(kx)(-\omega)\sin(\omega t)$$

$$= -n_1 \omega \cos(kx) \sin(\omega t) \overset{!}{=} -\nabla \vec{j} = -\partial_x j_1$$

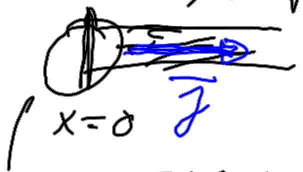
Ansatz hier (weil $n(x,t)$ nur von x abhängt): $\vec{j} = j(x,t) \cdot \vec{e}_1$

$$\curvearrowright \partial_x j_1 = n_1 \omega \cos(kx) \sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow j_1(x,t) = n_1 \omega \frac{1}{k} \sin(kx) \sin(\omega t) + C(t)$$

Die Bestimmung von $C(t)$ geht über die Randbedingung: $\dot{j}_1(x=0,t)=0$ (an geschlossenen Ende/Anfang)

$$\Longrightarrow \quad C(t) \equiv 0$$

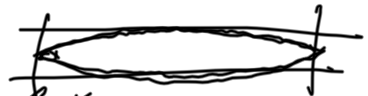


kein Teilchenstrom

Somit

$$\vec{j}(x,t) = \frac{n_1\omega}{k}\sin(kx)\sin(\omega t)\vec{e}_1$$

k wird mit der zweiten Randbedingung bestimmt: $\dot{j}_1(x=L,t)=0$



Wegen maximal möglicher Wellenlänge (s. Aufg.) passt genau ein Bauch herein:

$$k=\frac{\pi}{L} \longrightarrow \vec{j} = \frac{n_1\omega}{k}\cdot \underbrace{\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)}_{x=L} \sin(\omega t)\vec{e}_1$$

Ergebnis:

$$\vec{j} = \frac{n_1\omega L}{\pi}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cdot\sin(\omega t)\vec{e}_1$$

(b) Separationsansatz $n = n_0 + f(t)\,g(r)$

Wellengleichung $\Box n = \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right) n = 0$

$n(\vec{x},t) = n(r,t)$ hängt nur vom Abstand r vom Ursprung ab. $\Longrightarrow$ Betrachte das Problem in Kugelkoordinaten. $\longrightarrow$ $\Delta = \frac{1}{r}\partial_r^2 r$

(nur bei sphärischen Problemen)

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r}\partial_r^2 r\right) n(r,t) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{c^2}\ddot{n} = \frac{1}{r}\partial_r^2(r\cdot n)$$

Lösung per Separation:

$$\frac{1}{c^2}\ddot{f}\,g = \frac{1}{r}\partial_r^2(rg)\cdot f \Longleftrightarrow \underline{\frac{\ddot{f}}{f}\frac{1}{c^2}} = \frac{1}{rg}(rg)''$$

$: f\cdot g \neq 0$

Diese beiden Seiten können nur vergleichbar sein, wenn sie konstant sind:

$$\frac{\ddot{f}}{f} = -\omega^2 = c^2 \frac{(rg)''}{rg}$$

$$\Longrightarrow \quad \ddot{f} = -\omega^2 f$$

$$\underline{(rg)''} = \underline{-\frac{\omega^2}{c^2}\cdot(rg)}$$

<u>Lsg</u>: $f(t) = A\cdot\cos(\omega t) + B\cdot\sin(\omega t)$

$$rg(r) = C\cdot\cos\left(\frac{\omega}{c}r\right) + D\cdot\sin\left(\frac{\omega}{c}r\right)$$

$$g(r) = \frac{C\cdot\cos\left(\frac{\omega}{c}r\right) + D\sin\left(\frac{\omega}{c}r\right)}{r}$$

$\Longrightarrow$ Kugelwelle.

$$\frac{1}{c^2}\,\frac{\ddot{f}}{f} = \frac{(rg)''}{rg}$$

$$-\frac{\omega^2}{c^2}$$

Diffusionsproblem:

$$\rho(\vec{x},0) = \rho_0 - \rho_1 \cos^2(kx) \longrightarrow \rho(\vec{x},t) = ?$$

Problem:

$$\boxed{\rho(\vec{x},t) = \underbrace{e^{tD\Delta}\rho(\vec{x},0)}_{\text{formale Lösung}}, \quad \rho(\vec{x},0) \text{ geg.}}$$

Hierbei stellt man fest, dass $\rho(\vec{x},0)$ keine Eigenfunktion (spez.: $\cos^2(kx)$) zum Operator $tD\Delta$ ist:

$$tD\Delta\left(\cos^2(kx)\right) = tD\partial_x^2 \cos^2(kx)$$

$$= tD\partial_x\left(k(-\sin(kx))\cdot 2\cos(kx)\right)$$

$$= tD(-k[k\cdot\cos(kx)\cdot 2\cos(kx) + \sin(kx)\cdot 2k(-\sin(kx))]$$

$$= -tDk^2 2(\cos^2(kx) - \underbrace{\sin^2(kx)}_{1-c^2}) \neq \underbrace{EW\cdot\cos^2(kx)}_{EW(x)}$$

Eigenfunktionen des Δ-Operators sind

sin, cos

$$\cos^2(kx) = \cos^2(u) = \left(\frac{e^{iu}+e^{-iu}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\left(e^{2iu} + 2 + e^{-2iu}\right) = \underbrace{\frac{1}{2}\left(e^{2iu}+e^{-2iu}\right)\cdot\frac{1}{2}}_{=\cos(2u)} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cos(2u) + \frac{1}{2}. = \frac{1}{2}\cos(2kx) + \frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow e^{tD\partial_x^2}\,\frac{1}{2}\cos(2kx) = ?$$

$$tD\partial_x^2\,\frac{1}{2}\cos(2kx) = tD\,\frac{1}{2}(-4k^2)\cos(2kx)$$

$$\Longrightarrow e^{tD\partial_x^2}\,\frac{1}{2}\cos(2kx) = e^{-tD(4k^2)}\,\frac{1}{2}\cos(2kx)$$

Damit folgt

$$\rho(\vec{x},t) = \rho(x,t) = e^{tD\Delta}\rho(x,0)$$

$$= e^{tD\partial_x^2}\left[\rho_0 - \rho_1 \cos^2(kx)\right]$$

$$= e^{tD\partial_x^2}\left[\rho_0 - \rho_1\left(\tfrac{1}{2}\cos(2kx) + \tfrac{1}{2}\right)\right]$$

$$= e^{tD\partial_x^2}\left[\cancel{\rho_0 - \frac{\rho_1}{2}} - \frac{\rho_1}{2}\cos(2kx)\right] + \rho_0 - \frac{\rho_1}{2}$$

$$= e^{tD\partial_x^2}\left[- \frac{\rho_1}{2}\cos(2kx)\right] + \rho_0 - \frac{\rho_1}{2}$$

$$= -\rho_1 e^{tD\partial_x^2}\tfrac{1}{2}\cos(2kx) + \rho_0 - \frac{\rho_1}{2}$$

$$= -\rho_1 \tfrac{1}{2} e^{-tD4k^2}\cos(2kx) + \rho_0 - \frac{\rho_1}{2}.$$

$$e^x = 1 + \ldots$$

Jul 9-16:37

Kann auch sagen:

$$\underbrace{tD\partial_x^2 \rho_1 = 0}\cdot \rho_1 \longrightarrow e^{tD\partial_x^2}\rho_1 = e^0 \rho_1 = \rho_1$$

---

③ Maxwell-Gleichungen

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad , \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad , \quad \nabla\times\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}}$$

Elektrostatik: $\vec{B} = \vec{0}$, $\dot{\vec{E}} = \vec{0}$

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad , \quad \nabla\times\vec{E} = \vec{0}$$

Magnetostatik: $\dot{\vec{E}} = \vec{0}$, $\dot{\vec{B}} = \vec{0}$

$$\nabla\cdot\vec{B} = 0 \quad , \quad \nabla\times\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j}$$

[H37] Klausuraufgabe 2003

$$\vec{B}(\vec{x},t) = (B_0)(0,0,e^{-\omega t}). \qquad B_0 := 1$$

(a) Maxwell-Gleichungen abklappern:

$$\nabla\cdot\vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \quad , \quad \nabla\cdot\vec{B} = 0$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} \quad , \quad \nabla\times\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}}$$

$$\nabla\times\vec{E} = -\dot{\vec{B}} = -(0,0,-\omega e^{-\omega t}) = (0,0,\omega e^{-\omega t}).$$

$$\begin{pmatrix}\partial_x\\ \partial_y\\ \partial_z\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}E_1\\ E_2\\ E_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial_y E_3 - \partial_z E_2\\ \partial_z E_1 - \partial_x E_3\\ \partial_x E_2 - \underline{\underline{\partial_y E_1}}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ \omega e^{-\omega t}\end{pmatrix}$$

Einfachster Fall: $E_2 = E_3 = 0$, $E_1 = E_1(y)$

$\Longrightarrow \quad -\partial_y E_1(y) = \omega e^{-\omega t} \Longrightarrow E_1(y) = -y\omega e^{-\omega t}$

$\Longrightarrow \quad E(\vec{x},t) = \begin{pmatrix}-\omega y e^{-\omega t}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$

Berechne ρ via

$$\nabla \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \Longleftrightarrow \rho = \varepsilon_0 \nabla \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot 0 \equiv 0.$$

$\vec{j}$ per MAX IV:

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{j} + \frac{1}{c^2}\dot{\vec{E}}, \quad \nabla \times \vec{B} = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow \vec{j} = -\varepsilon_0 \dot{\vec{E}} = -\varepsilon_0 \begin{pmatrix} \omega^2 y e^{-\omega t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(b) Poynting-Vektor $\hat{=}$ Energiestrom:

$$\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 (\vec{E} \times \vec{B}) = \varepsilon_0 c^2 \begin{pmatrix} -\omega y e^{-\omega t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e^{-\omega t} \end{pmatrix}$$

$$= \varepsilon_0 c^2 \begin{pmatrix} 0 \\ \omega y e^{-2\omega t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla \cdot \vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \omega e^{-2\omega t}$$

Offensichtlich auch möglich: $E_1 = E_3 = 0$, $E_2 = E_2(x_0$

$\nabla \cdot \vec{S}$ bei PK

④ Skalar- und Vektorpotentiale

Wissenswert:

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

$$A(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int d^3x' \, \frac{\vec{j}(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

Biot-Savart: $\vec{j}$ Stromfaden!

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int d\vec{x}' \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3} .$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \dot{\vec{A}}, \quad \vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Idee: Bei <u>Elektrostatik</u> / <u>Magnetostatik</u> berechne zunächst ϕ / $\vec{A}$ und daraus per $\vec{E} = -\nabla\phi$ / $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ die dazugehörigen Feld.

<u>Eichung</u>: $\phi \longrightarrow \phi - \dot{\chi}$, $\vec{A} \longrightarrow \vec{A} + \nabla\chi$

(unter dieser Änderung bleiben $\vec{E}, \vec{B}$ - Felder invariant)

$$\nabla \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \qquad \text{Lorenz}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \qquad \text{Coulomb.}$$

Hiermit lassen sich inhomogene Wellengl. herleiten [s. [P16]).

[H28] Elektrostatisches Potential

$$\phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$$

(a) Homogen geladene Kugel: $\rho(\vec{x}) = \rho_0$.
Betrachte Punkt $\vec{x}$ einer (gedachten) Probeladung und beschreibe die Kugel mit geeigneten Koordinaten $\vec{x}'$:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r\cos(\theta) \end{pmatrix}\Bigg|_{\theta=0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}' = r' \begin{pmatrix} \sin(\theta')\cos(\varphi') \\ \sin(\theta')\sin(\varphi') \\ \cos(\theta') \end{pmatrix}$$

Dann folgt

$$|\vec{x}-\vec{x}'| = \left| \begin{pmatrix} -r's'C' \\ -r's'S' \\ r - r'c' \end{pmatrix} \right| = \sqrt{r'^2 s'^2 C'^2 + r'^2 s'^2 S'^2 + (r - r'c')^2}$$

$$= \sqrt{r'^2 s'^2 + r^2 - 2rr'c' + r'^2 c'^2} = \sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos(\theta')}$$

Es folgt

$$\Phi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho_0}{\sqrt{r'^2 + r^2 - 2rr'\cos(\theta')}}$$

$$= \frac{\rho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R dr'\, r'^2 \int_{-1}^{1} d(\cos\theta') \int_0^{2\pi} d\varphi' \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - \underline{\underline{2rr'}}\cos(\theta')}}$$

$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0} \int_0^R dr'\, r'^2 \frac{1}{\sqrt{2rr'}} \underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\theta') \frac{1}{\sqrt{\frac{r^2+r'^2}{2rr'} - \cos(\theta')}}}$$

$$= -2 \cdot \sqrt{\frac{r^2+r'^2}{2rr'} - \cos\theta'}\,\Bigg|_{\cos\theta' = -1}^{\cos\theta' = +1} \qquad \frac{1}{\sqrt{c-u}}$$

$$\underline{\underline{\int_{-1}^{1} du \frac{1}{\sqrt{c-u}}}} = -2\sqrt{c-u}$$

$$\sqrt{c-u}' = -1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{}}$$

$$\stackrel{!}{=} -\frac{1}{2}$$

$$= -2\left(\sqrt{\frac{r^2+r'^2}{2rr'}-1} - \sqrt{\frac{r^2+r'^2}{2rr'}+1}\right)$$

$$= -2\cdot\frac{1}{\sqrt{2rr'}}\left(\sqrt{r^2+r'^2-2rr'} - \sqrt{r^2+r'^2+2rr'}\right)$$

$$= \frac{\rho_0}{\cancel{2}\varepsilon_0}\int_0^R dr'\,r'^2\,\frac{1}{\sqrt{2rr'}}\,\frac{-\cancel{2}}{\sqrt{2rr'}}\left(\sqrt{}^{\,-} - \sqrt{}^{\,+}\right).$$

$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r}\int_0^R dr'\,r'\,\left(r+r' - |r-r'|\right)$$

(b) Unterscheide nun: $0\le r'\le R,\quad r<R \quad \phi$

$r<R$ (innerhalb der Kugel) $\quad \phi(\vec{x}) = \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r}\left[\int_0^r dr'\,r'\,2r \right.$ $\quad\Rightarrow |\underbrace{r-r'}_{<0}| = -(r-r')$

$$\left. + \int_r^R dr'\,r'\,2r'\right] \quad |\underbrace{r-r'}_{>0}| = r-r'$$

$$= \frac{\rho_0}{2\varepsilon_0 r}\left[\int_0^r dr'\,2rr' + \int_r^R dr\,2r'^2\right] = \frac{\rho_0}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

Analog für $r > R$.

Da die Kugel homogen geladen ist, gilt

$$\rho_0 = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\curvearrowright \quad \phi(\vec{x}) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R^3}\left(3R^2 - r^2\right), \quad r < R$$

$$\overset{!}{=} \phi(r)$$

Berechne $\vec{E}(r) = -\nabla\phi(r) = -\frac{\vec{r}}{r}\phi'(r)$

$$\overset{!}{=} \vec{e}_r r \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} \cdot r\vec{e}_r.$$

<u>Lektion</u>:

1) $\phi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int d^3x' \, \frac{\rho(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}$

2) $\rho(\vec{x}) = ?$, welche Parametrisierung $\vec{x}'$?

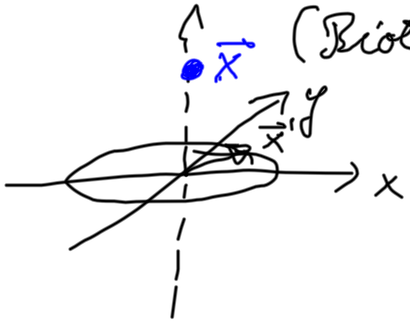
Nutze hierzu Symmetrien! $\longrightarrow |\vec{x}-\vec{x}'|$

3) Integral ausrechnen $\longrightarrow \phi(\vec{x})$

4) $\vec{E} = -\nabla\phi$.

[H29] (b) $\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\int \underline{\underline{d\vec{x}'}} \times \frac{\vec{x}-\vec{x}'}{|\vec{x}-\vec{x}'|^3}$

1) (Biot-Savart)



$\vec{x}$: „Probeladung" (Ort)

$\vec{x}'$: Parametrisierung des Problems.

Hier: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\cdot\vec{e}_z$, $\vec{x}' = R\begin{pmatrix} \cos(\varphi') \\ \sin(\varphi') \\ 0 \end{pmatrix} = R\cdot\vec{e}_\rho$

$|\vec{x}-\vec{x}'|^3 = \left|\begin{pmatrix} -R\cos(\varphi') \\ -R\sin(\varphi') \\ z \end{pmatrix}\right|^3 = \sqrt{R^2+z^2}^{\,3}$

2) $d\vec{x}'$ bestimmen:

$$d\vec{x}' = \frac{\partial \vec{x}'}{\partial \varphi'} d\varphi \quad \text{(totale Differential)}$$

(da $\vec{x}'$ hängt nur von φ ab)

$$= R \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\varphi') \\ \cos(\varphi') \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi = + R e_\varphi \, d\varphi$$

$$\Longrightarrow \quad d\vec{x}' = R\vec{e}_\varphi \, d\varphi'$$

3) Integral ausrechnen:

$$\vec{B}(\vec{x}) = \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int d\vec{x}' \times \frac{\vec{x} - \vec{x}'}{|\vec{x} - \vec{x}'|^3}$$

$$= \frac{I}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \, R\vec{e}_{\varphi'} \times \frac{(z\vec{e}_3 - R\vec{e}_\rho)}{\sqrt{R^2 + z^2}^3}$$

$$= \frac{IR}{4\pi\varepsilon_0 c^2} \int_0^{2\pi} d\varphi' \, \frac{z\vec{e}_{\rho'} + R\vec{e}_z}{\sqrt{R^2 + z^2}^3}$$

$$\stackrel{!}{=} \frac{IR}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\left[\cancel{\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}^3}\int_0^{2\pi} d\varphi\, \vec{e}_\varphi} \rightarrow 0 \right.$$

, aber $\int_0^{2\pi} d\varphi\, \vec{e}_\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \begin{pmatrix} c \\ s \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$$\left. + \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{R\vec{e}_z}{\sqrt{R^2+z^2}^3} \right]$$

$$= \frac{IR^2}{2\varepsilon_0 c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}^3}\, \vec{e}_z$$

Jul 9-18:32

Fourier

[H38] + zeitl. Anteile

$$T(\vec{x},t) = T_0 \frac{a}{|\vec{x}|} e^{-\frac{|\vec{x}|}{a}} \delta(t-t') \rightarrow \tilde{T}(\vec{k},\omega) = ?$$

1D-Fourier:

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dx\, e^{-ikx} f(x) \qquad \text{(Abstieg)}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk\, e^{+ikx} \tilde{f}(k).$$

3D-Fourier:

$$\tilde{f}(\vec{k}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3x\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{x}} f(\vec{x})$$

$$f(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^3} \int d^3k\, e^{+i\vec{k}\vec{x}} \tilde{f}(\vec{k})$$

4D - Fourier:

$$\tilde{f}(\vec{k},\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^4} \int d^3x\, dt\, e^{-i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} f(\vec{x},t)$$

$$f(\vec{x},t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}^4} \int d^3k\, d\omega\, e^{+i(\vec{k}\vec{x} - \omega t)} \tilde{f}(\vec{k},\omega)$$

Integrale existieren für schnell abfallende Funktionen ($f(\pm\infty) = 0$)

$$\tilde{\nabla} \longrightarrow i\vec{k}, \qquad \frac{\partial}{dt} \longrightarrow -i\omega$$

Maxwell in der Unterwelt

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon_0 \qquad \nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}, \qquad \nabla \times \vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \vec{j} + \frac{1}{c^2} \dot{\vec{E}} \rightsquigarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} i\vec{k} \cdot \tilde{\vec{E}} &= \frac{\tilde{\rho}}{\varepsilon_0} \\ i\vec{k} \cdot \tilde{\vec{B}} &= 0 \\ i\vec{k} \times \tilde{\vec{E}} &= +i\omega \tilde{\vec{B}} \\ i\vec{k} \times \tilde{\vec{B}} &= \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \tilde{\vec{j}} + \frac{-i\omega}{c^2} \tilde{\vec{E}}, \end{aligned}}$$

$$T(\vec{x},t) = T_0 \frac{a}{|\vec{x}|} e^{-\frac{|\vec{x}|}{a}} \cdot \delta(t-t') \longrightarrow \tilde{T}(\vec{k},\omega) = ?$$

$$\tilde{T}(\vec{k},\omega) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^4 \int d^3x\, dt\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{x}-\omega t)}\, T(\vec{x},t)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^4 \int d^3x\, dt\, e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\, T_0 \frac{a}{|\vec{x}|} e^{-\frac{|\vec{x}|}{a}} \delta(t-t')$$

Kugel-koord.

$$\vec{x} = r \begin{pmatrix} sC \\ sS \\ c \end{pmatrix}$$

$$|\vec{x}| = r$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}^4} \cdot \int_0^\infty dr\, r^2 \int_{-1}^{1} d\cos\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{+\infty} dt \ldots$$

$$\ldots e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}\, T_0 \frac{a}{r} e^{-\frac{r}{a}} \underline{\delta(t-t')}$$

$$= \frac{aT_0}{\sqrt{2\pi}^4} \int_0^\infty dr\, r^2 \int_{-1}^{1} d(\cos\theta) \int_0^{2\pi} d\varphi\, e^{-i(\vec{k}\vec{x}-\omega t')}\, \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$$

Trick: Was ist $\vec{k}\cdot\vec{x}$? $\vec{k}\cdot\vec{x} = \underline{|\vec{k}|\cdot|\vec{x}|\cdot\cos(\theta)}$

oder: $\vec{k} = k\vec{e}_3$ o.B.d.A.

wähle o.B.d.A.

$$= \frac{aT_0 2\pi}{\sqrt{2\pi}^4} \int_0^\infty dr\, r^2 \int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, e^{-ikr\cos\theta}\, e^{i\omega t'}\, \frac{e^{-\frac{r}{a}}}{r}$$

Jul 9-19:16

$$= \frac{aT_0 2\pi}{\sqrt{2\pi}^4} e^{i\omega t'} \int_0^\infty dr\, \cancel{r} e^{-\frac{r}{a}} \underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)\, e^{-ikr\cos\theta}}$$

$$= \frac{1}{-ikr} e^{-ikr\cos\theta} \Big|_{\cos\theta=-1}^{\cos\theta=1}$$

$$= \frac{1}{-ikr}\left(e^{-ikr} - e^{+ikr}\right)$$

$$= \frac{aT_0 2\pi e^{i\omega t'}}{\sqrt{2\pi}^4} \int_0^\infty dr\, \cancel{r} e^{-\frac{r}{a}} \frac{1}{-ik\cancel{r}} \left(e^{-ikr} - e^{+ikr}\right)$$

$$= \frac{aT_0 e^{i\omega t'}}{ik\sqrt{2\pi}^2} \underbrace{\int_0^\infty dr\, e^{-\frac{r}{a}} \left(e^{ikr} - e^{-ikr}\right)}$$

$$= \int_0^\infty dr \left(e^{-\frac{r}{a}+ikr} - e^{-\frac{r}{a}-ikr}\right)$$

$$= \int_0^\infty dr \left(e^{-r\left(\frac{1}{a}-ik\right)} - e^{-r\left(\frac{1}{a}+ik\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{-\frac{1}{a}+ik} e^{-r\left(\frac{1}{a}-ik\right)} \Big|_0^\infty - \frac{1}{-\frac{1}{a}-ik} e^{-r\left(\frac{1}{a}+ik\right)} \Big|_0^\infty$$

$$= -\frac{1}{-\frac{1}{a}+ik} + \frac{1}{-\frac{1}{a}-ik}$$

$$= \frac{aT_0 e^{i\omega t'}}{ik\, 2\pi} \cdot \Bigg(\underbrace{\frac{1}{-\frac{1}{a}-ik} - \frac{1}{-\frac{1}{a}+ik}} \Bigg)$$

$$\left(-\frac{1}{a}-ik\right)^*$$

$$= \frac{1}{\boxed{-\frac{1}{a}-ik}} \cdot \frac{-\frac{1}{a}+ik}{-\frac{1}{a}+ik} - \frac{1}{-\frac{1}{a}+ik} \cdot \frac{-\frac{1}{a}-ik}{-\frac{1}{a}-ik}$$

$$= \frac{-\frac{1}{a}+ik+\frac{1}{a}+ik}{\frac{1}{a^2}+k^2} = \frac{2ik}{\frac{1}{a^2}+k^2}$$

$$= \frac{aT_0 e^{i\omega t'}}{\cancel{ik}\,\cancel{2}\pi} \cdot \frac{\cancel{2ik}}{\frac{1}{a^2}+k^2} = \frac{aT_0 e^{i\omega t'}}{\pi\left(\frac{1}{a^2}+k^2\right)} \sim \frac{1}{1+k^2}$$

Skizze :

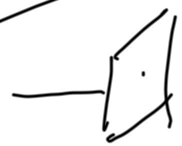
$$\boxed{f(\vec{x}) = \frac{e^{-|\vec{x}|}}{|\vec{x}|}}$$

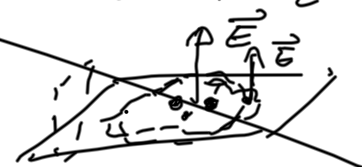
[H36] $\rho(\vec{x},t) = f(\sqrt{x^2+y^2})$. $\vec{E} = ?$

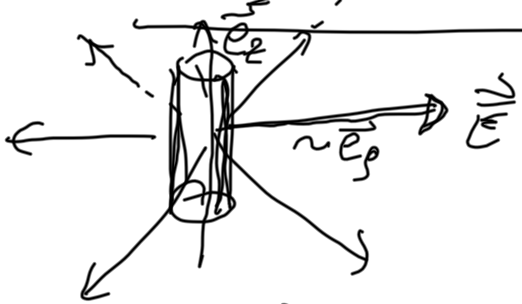
Offensichtlich ist ρ unabh. von z und hängt nur vom Abstand von der z-Achse ab.

~~Elektrische Feld zeigt in Richtung $\vec{e}_z$. Es hängt ab von r: $\vec{E} = E(r)\,\vec{e}_z$~~

~~$r = \sqrt{x^2+y^2}$~~







$$\vec{E} = E(\rho)\,\vec{e}_\rho$$

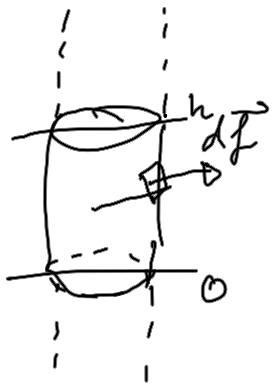
(wähle Zylinderkoord. (ρ, φ, z)).

Beziehung zwischen ρ und $\vec{E}$: $\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$

Um $\vec{E}$ zu berechnen, muss ich die Divergenz wegbekommen: Satz von Gauß!

$$\int_V d^3x\, \nabla\cdot\vec{E} = \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3x\, \rho(\vec{x})$$

(erste integrale MAX)



$d\vec{f}$ steht senkrecht auf der Oberfläche und es gilt $|d\vec{f}| = dA$

Hier: $d\vec{f} \parallel \vec{e}_\rho$, $d\vec{f} = \vec{e}_\rho\, R\, d\varphi\, dz$

Radius des Zylinders.

$$\rightsquigarrow \int_{\partial V} d\vec{f}\cdot\vec{E} = \int_{\partial V} \overset{\rho}{R}\, d\varphi\, dz\, \vec{e}_\rho\cdot\vec{E}$$

$$= \overset{\rho}{R}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^h dz\, E(\rho)\,\underbrace{\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_\rho}_{=1}$$

$$d^3x = \cancel{d\rho}\,\rho\big|_{\rho=R}\, d\varphi\, dz$$

$$= 2\pi \overset{\rho}{R} h\cdot E(\rho) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int d^3x\, \rho(\vec{x}) = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^\rho d\rho'\,\rho'\int_0^{2\pi} d\varphi\int_0^h dz\, f(\rho')$$

$$\overset{!}{=} \frac{1}{\varepsilon_0} 2\pi h \int_0^\rho d\rho' \rho' f(\rho')$$

$$\Longrightarrow \cancel{2\pi \overset{\rho}{R} h}\, E(\rho) = \frac{1}{\varepsilon_0} \cancel{2\pi h} \int_0^\rho d\rho' \rho' f(\rho')$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{\underline{E(\rho)}} = \frac{1}{\varepsilon_0 \rho} \int_0^\rho d\rho' \rho' f(\rho')$$

$$\curvearrowright \quad \vec{E}(\rho) = \frac{1}{\varepsilon_0 \rho} \left[\int_0^\rho d\rho' \rho' f(\rho') \right] \cdot \vec{e}_\rho$$

Bei nicht-symmetrischen Körpern:

$$d\vec{f} = (\vec{t}_1 \times \vec{t}_2)\, dA.$$

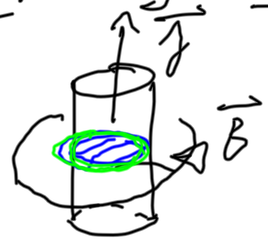
Satz von Gauß: $\quad \int_V d^3x \; \nabla \cdot \ldots = \int_{\partial V} d\vec{f} \ldots$

Satz von Stokes:

$$\int_F d\vec{f}\,(\nabla\times \ldots) = \oint_{\mathcal{C}} d\vec{x}\cdot\vec{B}$$

Kurvenintegral über Randfläche.

[PK6] Stromdurchflossener Leiter



Geeigneter Ansatz:

$$\vec{B}(\vec{x}) = B(\rho)\,\vec{e}_\varphi.$$

$$\nabla\times\vec{B} = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\vec{J} \longrightarrow \int d\vec{f}\,(\nabla\times\vec{B}) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2}\int d\vec{f}\,\vec{J} = \frac{I_F}{\varepsilon_0 c^2}$$

$$\int_{\mathcal{C}} d\vec{x}\cdot\vec{B} \quad =$$

Nach Stokes ist

$$\vec{x} = \rho \vec{e}_\rho = \rho \begin{pmatrix} s \\ c \end{pmatrix}, \quad d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \varphi} d\varphi = \rho \vec{e}_\varphi d\varphi$$

$$\int d\vec{f}\,(\nabla \times \vec{B}) = \int_{\mathcal{C}} d\vec{x} \cdot \vec{B} = \int_0^{2\pi} d\varphi\, \rho\, \underbrace{\vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_\varphi}_{=1} B(\rho) = 2\pi\rho\, B(\rho)$$

Somit:

$$2\pi\rho\, B(\rho) = \frac{I_F}{\varepsilon_0 c^2} \iff B(\rho) = \frac{I_F}{2\pi\rho\,\varepsilon_0 c^2}$$

Unterscheide, ob Punkt außerhalb oder innerhalb:

$$\boxed{\frac{I_F}{I} = \frac{\cancel{\pi}\rho^2}{\cancel{\pi}R^2}}$$

Damit folgt:

$$\vec{B}(\rho) = \frac{I}{2\pi\varepsilon_0 c^2}\,\vec{e}_\varphi \begin{cases} \rho/R^2 & \rho < R \\ 1/\rho & \rho > R \end{cases}$$

Jul 9-20:12

Green:

$$\boxed{L\,G(t,t') = \delta(t-t')}$$

$$\Delta \; ? = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$\Delta \frac{1}{-4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

$$\boxed{\Delta \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -4\pi\,\delta(\vec{r}-\vec{r}\,')}$$

$$\frac{d}{dx} \; ? = \delta(x-x')$$

$$\theta(x-x')$$